1. SUCESIONES NUMÉRICAS

Una **sucesión de números reales** es un conjunto de números dados ordenadamente de modo que se puedan numerar de la forma $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots\}$. Cada elemento de la sucesión se llama término y viene designado mediante un subíndice que indica el lugar que ocupa el término en la sucesión, es decir, el orden que sigue. Una sucesión puede tener un número finito o infinito de términos.

El **término general** es una expresión que sirve para obtener cualquier término de la sucesión y se denota como a_n para $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$.

Ejemplos 1.1.

1. *La sucesión de términos* $\{1, 3, 5, 7, 9, \cdots\}$ *se puede escribir como*

$$\{1, 1+(2), 1+(2+2), 1+(2+2+2), \cdots\} = \{1, 1+(2), 1+(2\cdot 2), 1+(2\cdot 3), \cdots\},$$

así que tiene como término general $a_n = 1+2n$ *para* $n = 0, 1, 2, \cdots,$ *o* $a_n = 2n-1$, *para* $n \in \mathbb{N}$.

2. *La sucesión de términos* $\{1, 4, 9, 16, 25, \cdots\}$ *se puede escribir como*

$$\{1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \cdots\}.$$

Entonces tiene como término general $a_n = n^2$*, para* $n \in \mathbb{N}$*.*

3. *¿Cuál es el término general de la sucesión* $\{1, 4, 8, 16, 32, \cdots\}$*?*

El término general también puede venir dado por más de una fórmula. Por ejemplo:

Considera la sucesión definida como $a_n = 0$ si n es impar, $a_n = 1$ si n es par, para $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, los términos de la sucesión son

$$\{0, 1, 0, 1, 0, 1, \cdots\}.$$

Otra forma de definir una suceción es **por recurrencia**, donde cada término se define en función del anterior. Así determinamos el primer término y la regla de recurrencia.

Ejemplos 1.2.

1. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 + a_n^2$ *para cualquier* $n \in \mathbb{N}$*. ¿Cuales son los primeros términos de la sucesión?*

2. $a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_{n-1}}{2}$ *para cualquier* $n \geq 2$.
   ¿Cuales son los primeros términos de la sucesión?

3. *Encuentra la regla de recurrencia de la sucesión de término* $1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots$.

Generalmente es complicado determinar el término general de una sucesión dada por recurrencia. Por ejemplo:

- La **sucesión de Fibonacci**:

$$a_1 = 1, a_2 = 1 \quad y \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1},$$

  tiene como término general

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

EJEMPLOS NOTABLES DE SUCESIONES

- **Progresión aritmética** de diferencia d.

  Es una sucesión en la que cada término se obtiene sumando al anterior una cantidad fija denominada *diferencia* y que denotamos como d.

  $$\{a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \cdots\},$$

  donde el término general es $a_n = a_1 + (n-1)d$.

  Ejemplos 1.3.

  1. *La sucesión* $\{1, 3, 5, 7, 9, \cdots\} = \{1, 1+2, 1+2\cdot 2, 1+2\cdot 3, \cdots\}$ *es una progresión aritmética de diferencia* $d = 2$.
  2. *La sucesión* $\{8, 5, 2, -1, -4, \cdots\} = \{8+(-3), 8+2\cdot(-3), 8+3\cdot(-3), \cdots\}$ *es una progresión aritmética de diferencia* $d = -3$.

  Para calcular la *suma de un número finito, n, de términos de una progresión aritmética*, llamemosle

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

lo que hacemos es sumar dos veces S_n invirtiendo el orden de los términos en una de las sumas de forma que:

$$+\begin{array}{l} S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 \end{array}$$

es igual a $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots (a_n + a_1)$. Como los pares de términos a_1 y a_n, a_2 y a_{n-1}, $\cdots$ son equidistantes, suman la misma cantidad y

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) = n(a_1 + a_n).$$

Por tanto

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

- **Progresión geométrica** de razón $r \in \mathbb{R}$.

  Es una sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad fija llamada *razón*, r.

  $$\{a_1, a_1 r, a_1 r^2, \cdots\},$$

  donde el término general es $a_n = a_1 r^{n-1}$.

  Ejemplos 1.4.

  1. *La sucesión* $\{3, 6, 12, 24, 48, \cdots\} = \{3, 3\cdot 2, 3\cdot 2^2, \cdots\}$ *es una progresión geométrica de razón* $r = 2$ *y primer término* $a_1 = 3$*.*
  2. *La sucesión* $\{4, 2, 1, 1/2, 1/4, \cdots\} = \{4, 4\cdot\frac{1}{2}, 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2, \cdots$ *es una progresión geométrica de razón* $r = \frac{1}{2}$ *y primer término* $a_1 = 4$*.*

  Para calcular la *suma de un número finito, n, de términos de una progresión geométrica,*

  $$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1}$$

lo que hacemos es multiplicar S_n por la razón y le restamos S_n de forma que:

$$
-\begin{aligned} rS_n &= a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^n \\ S_n &= a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{n-1} \end{aligned}
$$

es igual a $(r-1)S_n = a_1r^n - a_1$. Por tanto

$$
S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}.
$$

Para progresiones geométricas ilimitadas y decrecientes con |r|<1, en las que sus términos se hacen cada vez menores, cada vez más cercanos a cero, la suma de sus infinitos términos puede obtenerse como

$$
S = \frac{a_1}{1 - r}.
$$

Siguiendo un razonamiento similar podemos probar que el producto de los n primeros términos de una progresión geométrica es

$$
P_n = \sqrt{(a_1a_n)^n}.
$$

En caso de una progresión geométrica con razón negativa, $r < 0$, sus términos sucesivos adoptan signos mutuamente contrarios. Este tipo especial de progresión recibe el nombre de geométrica alternante.

Ejemplo 1.5.

1. *La sucesión* $\{2, -6, 18, -54, 162, \cdots\}$ *es una progresión geométrica alternante de razón* $r = -3$ *y de primer término* $a_1 = 2$*.*

- **Progresión aritmético-geométrica** de razón $r \in \mathbb{R}$ y primer término $a \in \mathbb{R}$:

Es una sucesión en la que cada término se obtiene sumando al anterior la *diferencia* d y multiplicando la *razón* r.

$$\{a_1, (a_1 + d)r, (a_1 + d)r^2, \cdots\},$$

donde el término general es $a_n = (a_1 + (n - 1))r^{n-1}$.

Para calcular la suma parcial n-ésima $S_n = a_1 + (a_1 + d)r + \cdots + (a_1 + (n-1)d)r^{n-1}$, le restamos

rS_n y así

$$(1-r)S_n = a_1 + d(\underbrace{r + \cdots + r^{n-1}}_{\dfrac{r-r^n}{1-r}}) - (a_1 + (n-1)d)r^n,$$

eso es $S_n = \dfrac{a_1(1-r) + d(r-r^n)}{(1-r)^2} - (a_1 + (n-1)d)r^n.$

PROBLEMAS

1. ¿Cuánto suman los 19 primeros términos de la sucesión $\{5/2, 1, -1/2, \cdots\}$?

2. Sea $a_0 = 7$ y $a_n = 2a_{n-1} + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Halla el término general de la sucesión.

3. Consideremos la sucesión definida como $f_0(x) = \frac{1}{1-x}$ y $f_n(x) = f_0(f_{n-1}(x))$ para $n > 0$ y $x \in \mathbb{R}$. Esto es una *sucesión de funciones* en variable real x definida por recurrencia. Halla $f_{2021}(-1/3)$.

4. Una escalera tiene n escalones. Un duende puede subir la escalera de escalón en escalón o saltándose un escalón. Halla una fórmula recursiva para el número de maneras en que el duende puede subir la escalera en función del número de escalones.

5. Halla la suma de todos los números pares comprendidos entre 99 y 1001.

6. Calcula todas las sucesiones de números naturales consecutivos cuya suma es 2021.

   (adaptado de Olimpiada Matemática Española (fase local), 1998/1999)

7. Sean $a_1, a_2, ..., a_{2020}$ 2020 números reales de manera que la suma de 1009 de ellos cualesquiera es positiva. Demostrar que la suma de los 2020 números también es positiva.
(Olimpiada Matemática Española (fase local), 2019/2020)

8. Sea n un entero positivo. Calcular la siguiente suma:

$$\frac{3}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 5}+\frac{4}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\cdots+\frac{n+2}{n\cdot(n+1)\cdot(n+3)\cdot(n+4)}.$$

(Olimpiada Matemática Española (fase local), 2019/2020)

9. Para pertenecer a un club cada nuevo socio debe pagar como cuota de inscripción a cada miembro del club la misma cantidad que él tuvo que pagar en total cuando ingresó más un euro. Si el primer socio no pagó nada, ¿cuánto deberá pagar en total el n-ésimo socio?
(Olimpiada Matemática Española (fase local), 2015/2016)

10. Calcula la suma de los inversos de los 2013 primeros términos de la sucesión de término general

$$a_n = 1 - \frac{1}{4n^2}.$$

(Olimpiada Matemática Española (fase local), 2012/2013)

11. Prueba que el producto de los 2013 primeros términos de la sucesión de término general

$$a_n = 1 + \frac{1}{n^3}$$

es menos que 3.

(Olimpiada Matemática Española (fase local), 2012/2013)

12. Considera la sucesión $a_n = 3$, $a_{n+1} = a_n + a_n^2$. Encuentra las últimas cifras de a_{2000}.

(Olimpiada Matemática Española (fase local), 1999/2000)

13. Hallar el menor número natural que es suma de 9 naturales consecutivos, es suma de 10 naturales consecutivos y además es suma de 11 naturales consecutivos.

    (Olimpiada Matemática Argentina, 1995 problema 4)

14. Sean a_0, a_1, a_2, a_3 y a_4 cinco números positivos en progresión aritmética de diferencia d. Probar que

$$a_2^3 \leq \frac{1}{10}(a_0^3 + 4a_1^3 + 4a_3^3 + a_4^3).$$

(Olimpiada Matemática Española (fase nacional), 2007 problema 1)

15. Consideremos dos sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ definidas por

$$x_0 = 1,\ x_1 = 1,\ x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1}$$

$$y_0 = 1,\ y_1 = 7,\ y_{n+1} = 2y_n + 3y_{n-1}.$$

Demostrar que 1 es el único número que aparece simultáneamente en las dos sucesiones.

(USA Mathematical Olympiad, 1973 problema 2)

16. Hallar todas las sucesiones estrictamente crecientes de números naturales que cumplen que cualquier número natural se escribe de forma única como suma de términos distintos de la sucesión.

17. Consideramos la sucesión $\{a_n\}$ dada por $a_1 = a_2 = 1$ y

$$a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + a_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Calcular a_{2004}.

(China Western Mathematical Olympiad, 2005 problema 5).

18. Considerando la suma

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)},$$

expresar S_{2015} como una fracción irreducible.

19. Sea n un número natural. Demostrar que la suma de todas las fracciones $\frac{1}{pq}$, donde p y q son primos relativos tales que $1 \leq p < q \leq n$ y $p + q > n$, es igual a $1/2$.

    (All-Soviet-Union Competition, 1969 problema 5)